

华教杯全国大学生数学竞赛考试大纲

华教杯全国大学生数学竞赛考试内容按照非数学类专业组、数学类专业组和专科生组划分。

一、非数学类专业组

初赛考试内容为高等数学，决赛考试内容为高等数学、线性代数，具体内容如下：

(一) 高等数学部分：

1. 函数、极限、连续

- (1) 函数的概念及表示法，函数关系的建立；
- (2) 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；
- (3) 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数；
- (4) 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限和右极限；
- (5) 无穷小量和无穷大量的概念及其关系、无穷小量的性质及无穷小量的比较；
- (6) 极限的四则运算、极限存在的两个准则（单调有界准则和夹逼准则）、两个重要极限；
- (7) 函数连续的概念、函数间断点的类型、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质。

2. 一元函数微分学

- (1) 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线；
- (2) 导数和微分的四则运算、基本初等函数的导数、复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分、高阶导数的概念及运算；
- (3) 微分中值定理、洛必达法则、泰勒公式等；
- (4) 函数单调性的判别、函数的极值、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线、函数的最大值与最小值、弧微分、曲率的概念、曲率圆与曲率半径。

3. 一元函数积分学

- (1) 原函数和不定积分的概念、不定积分的基本性质、基本积分公式；

(2) 定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、积分上限的函数及其导数、牛顿-莱布尼茨公式；

(3) 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法；

(4) 有理函数的积分；

(5) 反常（广义）积分、定积分的应用。

4. 常微分方程

(1) 常微分方程的基本概念、变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程；

(2) 可降阶的高阶微分方程、线性微分方程解的性质及解的结构定理；

(3) 高阶线性微分方程；

(4) 简单的二阶常系数齐次及非齐次线性微分方程、微分方程的简单应用。

5. 向量代数与空间解析几何

(1) 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积、两向量的夹角、向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦；

(2) 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程；

(3) 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离、球面、柱面、旋转曲面；

(4) 常用的二次曲面方程及其图形、空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

6. 多元函数微分学

(1) 多元函数的概念、二元函数的几何意义、二元函数的极限与连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质；

(2) 多元函数的偏导数和全微分、全微分存在的必要条件和充分条件；

(3) 多元复合函数、隐函数的求导法、二阶偏导数、方向导数和梯度；

(4) 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线；

(5) 二元函数的二阶泰勒公式、多元函数的极值和条件极值、多元函数的最大值、最小值及其简单应用。

7. 多元函数积分学

(1) 二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用；

(2) 两类曲线积分的概念、性质及计算，两类曲线积分的关系；

(3) 格林（Green）公式、平面曲线积分与路径无关的条件、二元函数全微分的原函数；

- (4) 两类曲面积分的概念、性质及计算，两类曲面积分的关系；
- (5) 高斯（Gauss）公式、斯托克斯（Stokes）公式、散度和旋度的概念及计算；
- (6) 曲线积分和曲面积分的应用。

8. 无穷级数

- (1) 常数项级数的收敛与发散的概念、收敛级数的和的概念、级数的基本性质与收敛的必要条件；
- (2) 几何级数与 p 级数及其收敛性、正项级数收敛性的判别法、交错级数与莱布尼茨定理；
- (3) 任意项级数的绝对收敛与条件收敛、函数项级数的收敛域与和函数的概念；
- (4) 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域、幂级数的和函数、幂级数在其收敛区间内的基本性质、简单幂级数的和函数的求法；
- (5) 初等函数的幂级数展开式、函数的傅里叶（Fourier）系数与傅里叶级数、狄利克雷（Dirichlet）定理；
- (6) 函数在 $[-1, 1]$ 上的傅里叶级数、函数在 $[0, 1]$ 上的正弦级数和余弦级数。

（二）线性代数部分：

1. 行列式

- (1) 行列式的概念和基本性质；
- (2) 行列式按行（列）展开定理。

2. 矩阵

- (1) 矩阵的概念、矩阵的线性运算、矩阵的乘法、方阵的幂、方阵乘积的行列式、矩阵的转置；
- (2) 逆矩阵的概念和性质、矩阵可逆的充分必要条件；
- (3) 伴随矩阵、矩阵的初等变换、初等矩阵、矩阵的秩、矩阵的等价；
- (4) 分块矩阵及其运算。

3. 向量

- (1) 向量的概念、向量的线性组合与线性表示；
- (2) 向量组的线性相关与线性无关、向量组的极大线性无关组；
- (3) 等价向量组、向量组的秩、向量组的秩与矩阵的秩之间的关系；
- (4) 向量空间及其相关概念、 n 维向量空间的基变换和坐标变换、过渡矩阵；
- (5) 向量的内积、线性无关向量组的正交规范化方法、规范正交基、正交矩阵及其性

质。

4. 线性方程组

- (1) 线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则;
- (2) 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件、非齐次线性方程组有解的充分必要条件;
- (3) 线性方程组解的性质和解的结构;
- (4) 齐次线性方程组的基础解系、通解和解空间, 非齐次线性方程组的通解。

5. 矩阵的特征值和特征向量

- (1) 矩阵的特征值和特征向量的概念、性质;
- (2) 相似变换、相似矩阵的概念及性质;
- (3) 矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵、实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵。

6. 二次型

- (1) 二次型及其矩阵表示、合同变换与合同矩阵、二次型的秩、惯性定理、二次型的标准形和规范形;
- (2) 用正交变换和配方法化二次型为标准形、二次型及其矩阵的正定性。

二、数学类专业组

初赛考试内容为数学分析、高等代数，决赛考试内容为数学分析、高等代数、概率论数理统计和解析几何，具体内容如下：

（一）数学分析部分：

1. 集合与函数

- (1) 实数集、有理数与无理数的稠密性，实数集的界与确界；
- (2) n 维欧氏空间的基本概念与性质；
- (3) 实数系基本定理及其在 n 维欧氏空间中的对应定理；
- (4) 函数、映射、变换及其几何意义，隐函数、反函数与逆变换、反函数存在定理、初等函数及相关的性质。

2. 极限与连续

- (1) R^n 中点列极限、收敛列的基本性质；
- (2) 夹逼准则、子列极限；
- (3) 函数极限及其基本性质；
- (4) 函数的连续与间断、左连续右连续、（有界闭集上）连续函数的性质；
- (5) 上极限、下极限。

3. 一元函数微分学

- (1) 导数及其几何意义、可导与连续的关系、导数的各种计算方法，微分及其几何意义、可微与可导的关系、一阶微分形式不变性；
- (2) 微分中值定理与 Taylor 公式；
- (3) 一元微分学的应用。

4. 多元函数微分学

- (1) 偏导数、全微分及其几何意义，可微、偏导存在、连续之间的关系，复合函数的偏导数与全微分，方向导数与梯度，高阶偏导数，多元函数中值定理与 Taylor 公式；
- (2) 多元复合函数的可微性和求导、隐函数（组）存在定理、隐函数（组）求导方法、多元向量值函数的反函数；
- (3) 平面曲线的切线与法线、空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线等几何应用；
- (4) 极值问题、条件极值与 Lagrange 乘数法。

5. 一元函数积分学

- (1) 原函数与不定积分、不定积分的基本计算方法、有理函数积分等；
- (2) 定积分及其几何意义、上积分、下积分、Darboux 和、Riemann 和、可积条件；
- (3) 定积分的性质；
- (4) 无限区间上的广义积分及无界函数广义积分；
- (5) 微元法、几何应用及其他应用。

6. 多元函数积分学

- (1) 积分及其几何意义；
- (2) 重积分的应用；
- (3) 含参量常义积分及其连续性、可微性、可积性等；
- (4) 曲线积分、曲面积分，两类线积分、两类面积分之间的关系；
- (5) Green 公式、Ostrogradsky-Gauss 公式、Stokes 公式、曲线积分与路径无关性等。

7. 无穷级数

- (1) 正项级数收敛性、一般项级数的收敛性；
- (2) 函数列与函数项级数；
- (3) 幂级数；
- (4) Fourier 级数及 Fourier 级数的收敛性。

(二) 高等代数部分：

1. 多项式

- (1) 数域与一元多项式；
- (2) 因式分解定理；
- (3) 有理系数多项式；
- (4) 多元多项式及对称多项式、韦达 (Vieta) 定理。

2. 行列式

- (1) 行列式的定义、性质；
- (2) 行列式的计算以及 Cramer 法则。

3. 线性方程组

- (1) 高斯 (Gauss) 消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解；
- (2) 向量与向量组；
- (3) 矩阵的行秩、列秩、秩、矩阵的秩与其子式的关系；

(4) 线性方程组求。

4. 矩阵

(1) 矩阵的概念、矩阵的运算及其运算律；

(2) 矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系；

(3) 矩阵的逆、伴随矩阵、矩阵可逆的条件，初等矩阵、初等变换、矩阵的等价标准形及逆矩阵的求取等；

(4) 分块矩阵及其运算与性质。

5. 双线性函数与二次型

(1) 双线性函数、对偶空间；

(2) 二次型；

(3) 正定、半正定、负定、半负定二次型及正定、半正定、负定、半负定矩阵的性质与判定。

6. 线性空间

(1) 线性空间的定义与性质；

(2) 维数、基与坐标；

(3) 基变换与坐标变换；

(4) 线性子空间；

(5) 子空间的交与和、维数公式、子空间的直和。

7. 线性变换

(1) 线性变换的定义、线性变换的运算、线性变换的矩阵；

(2) 特征值与特征向量；

(3) 线性变换的值域与核、不变子空间、线性空间的分解与同构；

8. Jordan 标准形

(1) λ -矩阵；

(2) Jordan 矩阵、Jordan 标准形、有理标准形。

9. 欧式空间

(1) 欧式空间的定义与基本性质；

(2) 欧氏空间的同构，正交变换、子空间的正交补，对称变换、实对称矩阵的标准形；

(3) 主轴定理、用正交变换化实二次型或实对称矩阵为标准形；

(4) 酉空间、Schur 分解、射影、垂直射影等。

(三) 概率论与数理统计部分：

1. 随机事件和概率

- (1) 随机事件与样本空间、事件的关系与运算、完备事件组；
- (2) 概率的概念、概率的基本性质、古典型概率、条件概率；
- (3) 概率的基本公式、事件的独立性、独立重复试验。

2. 随机变量及其分布

- (1) 随机变量、随机变量分布函数的概念及其性质；
- (2) 离散型随机变量的概率分布、连续型随机变量的概率密度；
- (3) 常见随机变量的分布、随机变量函数的分布。

3. 多维随机变量及其分布

- (1) 多维随机变量及其分布、二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布；
- (2) 二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度；
- (3) 随机变量的独立性和不相关性、常用二维随机变量的分布；
- (4) 两个及两个以上随机变量简单函数的分布。

4. 随机变量的数字特征

- (1) 随机变量的数学期望（均值）、方差、标准差及其性质；
- (2) 随机变量函数的数学期望，矩、协方差矩阵、相关系数及其性质。

5. 大数定律和中心极限定理

- (1) 切比雪夫（Chebyshev）不等式、切比雪夫大数定律；
- (2) 伯努利（Bernoulli）大数定律、辛钦（Khinchine）大数定律；
- (3) 棣莫弗-拉普拉斯（DeMoivre-Laplace）定理、列维-林德伯格（Levy-Lindberg）定理。

6. 参数估计

- (1) 点估计的概念、估计量与估计值、矩估计法、最大似然估计法；
- (2) 估计量的评选标准、区间估计的概念；
- (3) 单个正态总体的均值和方差的区间估计、两个正态总体的均值差和方差比的区间估计。

7. 假设检验

- (1) 显著性检验、假设检验的两类错误；
- (2) 单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验。

（四）解析几何部分：

1. 向量与坐标

- （1）向量的定义、表示、向量的线性运算、向量的分解、几何运算；
- （2）坐标系的概念、向量与点的坐标及向量的代数运算；
- （3）向量在轴上的射影及其性质、方向余弦、向量的夹角；
- （4）向量的数量积、向量积和混合积的定义、几何意义、运算性质、计算方法及应用。

2. 轨迹与方程

- （1）曲面方程的定义:普通方程、参数方程及其关系；
- （2）空间曲线方程的普通形式和参数方程形式及其关系；
- （3）建立空间曲面和曲线方程的一般方法、应用向量建立简单曲面、曲线的方程；
- （4）球面的标准方程和一般方程、母线平行于坐标轴的柱面方程。

3. 平面与空间直线

- （1）平面方程、直线方程的各种形式；
- （2）从决定平面和直线的几何条件出发，选用适当方法建立平面、直线方程；
- （3）根据平面和直线的方程，判定平面与平面、直线与直线、平面与直线间的位置关系；
- （4）根据平面和直线的方程及点的坐标判定有关点、平面、直线之间的位置关系、计算他们之间的距离与交角等；求两异面直线的公垂线方程。

4. 二次曲面

- （1）柱面、锥面、旋转曲面的定义，求柱面、锥面、旋转曲面的方程；
- （2）椭球面、双曲面与抛物面的标准方程和主要性质，根据不同条件建立二次曲面的标准方程；
- （3）单叶双曲面、双曲抛物面的直纹性及求单叶双曲面、双曲抛物面的直母线的方法；
- （4）根据给定直线族求出它表示的直纹面方程，求动直线和动曲线的轨迹问题。

5. 二次曲线

- （1）二次曲线的渐进方向、中心、渐近线；
- （2）二次曲线的切线、二次曲线的正常点与奇异点；
- （3）二次曲线的直径、共轭方向与共轭直径；
- （4）二次曲线的主轴、主方向，特征方程、特征根；
- （5）化简二次曲线方程并画出曲线在坐标系的位置草图。

三、专科生组

初赛考试内容为高等数学，决赛考试内容为高等数学、线性代数，具体内容如下：

（一）高等数学部分：

1. 函数、极限、连续

- (1) 函数的概念及表示法，函数关系的建立；
- (2) 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；
- (3) 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数；
- (4) 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限和右极限；
- (5) 无穷小量和无穷大量的概念及其关系、无穷小量的性质及无穷小量的比较；
- (6) 极限的四则运算、极限存在的两个准则（单调有界准则和夹逼准则）、两个重要极限；
- (7) 函数连续的概念、函数间断点的类型、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质。

2. 一元函数微分学

- (1) 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线；
- (2) 导数和微分的四则运算、基本初等函数的导数、复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分、高阶导数的概念及运算；
- (3) 微分中值定理、洛必达法则、泰勒公式等；
- (4) 函数单调性的判别、函数的极值、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线、函数的最大值与最小值、弧微分、曲率的概念、曲率圆与曲率半径。

3. 一元函数积分学

- (1) 原函数和不定积分的概念、不定积分的基本性质、基本积分公式；
- (2) 定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、积分上限的函数及其导数、牛顿-莱布尼茨公式；
- (3) 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法；
- (4) 有理函数的积分；
- (5) 反常（广义）积分、定积分的应用。

4. 常微分方程

- (1) 常微分方程的基本概念、变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程；
- (2) 可降阶的高阶微分方程、线性微分方程解的性质及解的结构定理；
- (3) 高阶线性微分方程；
- (4) 简单的二阶常系数齐次及非齐次线性微分方程、微分方程的简单应用。

5. 向量代数与空间解析几何

- (1) 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积、两向量的夹角、向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦；
- (2) 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程；
- (3) 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离、球面、柱面、旋转曲面；
- (4) 常用的二次曲面方程及其图形、空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

(二) 线性代数部分：

1. 行列式

- (1) 行列式的概念和基本性质；
- (2) 行列式按行（列）展开定理。

2. 矩阵

- (1) 矩阵的概念、矩阵的线性运算、矩阵的乘法、方阵的幂、方阵乘积的行列式、矩阵的转置；
- (2) 逆矩阵的概念和性质、矩阵可逆的充分必要条件；
- (3) 伴随矩阵、矩阵的初等变换、初等矩阵、矩阵的秩、矩阵的等价；
- (4) 分块矩阵及其运算。

3. 向量

- (1) 向量的概念、向量的线性组合与线性表示；
- (2) 向量组的线性相关与线性无关、向量组的极大线性无关组；
- (3) 等价向量组、向量组的秩、向量组的秩与矩阵的秩之间的关系；
- (4) 向量空间及其相关概念、 n 维向量空间的基变换和坐标变换、过渡矩阵；
- (5) 向量的内积、线性无关向量组的正交规范化方法、规范正交基、正交矩阵及其性

质。

4. 线性方程组

- (1) 线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则;
- (2) 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件、非齐次线性方程组有解的充分必要条件;
- (3) 线性方程组解的性质和解的结构;
- (4) 齐次线性方程组的基础解系、通解和解空间, 非齐次线性方程组的通解。

5. 矩阵的特征值和特征向量

- (1) 矩阵的特征值和特征向量的概念、性质;
- (2) 相似变换、相似矩阵的概念及性质;
- (3) 矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵、实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵。

6. 二次型

- (1) 二次型及其矩阵表示、合同变换与合同矩阵、二次型的秩、惯性定理、二次型的标准形和规范形;
- (2) 用正交变换和配方法化二次型为标准形、二次型及其矩阵的正定性。